No. 1 Date 25/11/2019

Απειροστικός Λογισμός III

Υπενθύμιση:

Ορισμός ορίου πραγματικής συνάρτησης:

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, σε ένα σημείο συσσώρευσης $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ του U

[μπορεί και κανένα $\bar{x}_0 \notin U$]: Έναν μοναδικό [πρόταση] συμβολίζεται με $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \in \mathbb{R}$ (σημαντικό) και ορίζεται ως το $l \in \mathbb{R}$ με την

ιδιότητα $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to l$ ή ισοδύναμα $\iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - l| < \varepsilon$

Άλλοι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί:

(1) $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) \iff \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} |f(x) - l| = 0$

[Διόρθωση στις σημειώσεις Δ.Α, σελ. 60, πρώτη λέξη ~~Άρα~~ → Αν]

(2) $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \iff \lim\limits_{h \to 0} f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = l$ [απόδειξη: θέτουμε $h = \bar{x} - \bar{x}_0$

τότε $\bar{x} \in B(x_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} \iff \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta \wedge \underset{\iff \|\bar{x} - \bar{x}_0\| > 0}{\bar{x} \neq \bar{x}_0} \iff 0 < \underbrace{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}_{= h (= \bar{h} - \bar{0})} < \delta$

$\iff \bar{h} \in B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{0}\}$. Επίσης: $\bar{x} \in U \iff \underbrace{\bar{x} - \bar{x}_0}_{= h} = U - \bar{x}_0 := \{\bar{y} - \bar{x}_0 : \bar{y} \in U\}$

Συνεπώς: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0) \cdot \forall \bar{x} \in U \cap B(x_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |\underset{\bar{x}_0 + \bar{h}}{f(\bar{x})} - l| < \varepsilon$

$\iff \forall \bar{h} \in (U - x_0) \cap B(0, \delta) \setminus \{\bar{0}\}$

Αναγκαίες Παρατηρήσεις:

(a) Αν $f: U \to \mathbb{R}$, τότε $f(\bar{x}_0 + \cdot): U - x_0 \to \mathbb{R}$, όπου $f(\bar{x} + \cdot)(\bar{h}) := f(\bar{x}_0 + \bar{h})$

με $\bar{h} \in U - \bar{x}_0$ όπου $\exists \bar{x} \in U : \bar{h} = \bar{x} - \bar{x}_0$.

(b) $\bar{x}$ σημείο συσσ. του $U \iff \vec{0}$ σημ. συσσ. του $U - \bar{x}_0$

[$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x}_0 \in U \setminus \{\bar{x}_0\} \cap B(\bar{x}_0, \varepsilon) \iff U \setminus \{\bar{x}_0\} \cap B(\bar{x}_0, \varepsilon) \neq \emptyset$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{h}_\varepsilon = \bar{x}_\varepsilon - \bar{x}_0 \in (U - \bar{x}_0) \setminus \{\bar{0}\} \cap B(\bar{x}_0, \varepsilon)$]

↑
επιβεβαίωση σκέψης

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Πρόταση:

(α) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = m \Rightarrow$ (α) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f+g)(\bar{x}) = l+m$ $= f(x)+g(x)$

[Απόδειξη με χρήση πραγματικών ($\mathbb{?}$) ακολουθιών ($\to$ ΑΝΙ)

Έστω $(\bar{x}_\nu) \in U/\{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Τότε εξ ορισμού υπάρχει

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}_\nu) \to l \\ g(\bar{x}_\nu) \to m \end{array}\right\} f(\bar{x}_\nu) + g(\bar{x}_\nu) \to l+m$$

(β) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \underbrace{(fg)(\bar{x})}_{:= f(\bar{x})g(\bar{x})} = \lim$ [απόδειξη ανάλογη με πριν]

(γ) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{l}{m}$, όπου $m \neq 0$ [ανάλογη με πριν]

$:= \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$, όπου $g(\bar{x}) \neq 0$

[να προσέξει αν $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) \overset{(*)}{=} m \neq 0$

$\boxed{\text{SOS}}$ Άσκηση: Τότε $\exists \delta_0 > 0 : g(\bar{x}) \neq 0 : \forall \bar{x} \in U/\{\bar{x}_0\} \cap B(\bar{x}_0, \delta_0)$

$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in U/\{\bar{x}_0\} \cap B(\bar{x}_0, \delta)$ $\quad |g(\bar{x}) - m| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow m - \varepsilon < g(\bar{x}) < m + \varepsilon$

[Συνεπώς αν $m > 0$, επιλέγοντας

$0 < \varepsilon \leq m$, έχουμε το αποδεκτό για το αντίστοιχο $\delta = \delta_0$

αν $m < 0$, επιλέγοντας $0 < \varepsilon \leq |m|$, έχουμε ...]

(δ) Έστω $V \subset \mathbb{R}$, $h: V \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $l \in V$ και $f(U) \subset V$ με $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$

Τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (h \circ f)(\bar{x}) = h(l)$ [Απόδειξη: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U/\{\bar{x}_0\}$

με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow h(f(\bar{x}_\nu)) \to h(l)$]

Τότε εξ ορισμού: $\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{\in V \subset \mathbb{R}} \to \underbrace{l}_{\in V \in \mathbb{R}}$

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$: $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$. Συνεχής στο $A \subset U$, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in A$.

[SOS - SOS - SOS. ($\neq$) $f|A \Rightarrow A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

$:\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset A$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

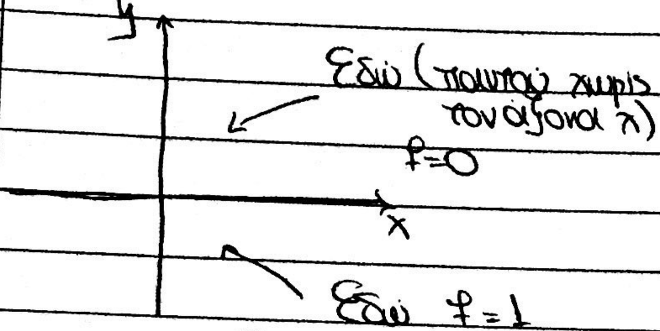
→ συνεχής, αν η $f: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο U (ευ) [⟹ η f συνεχής $\forall x_0 \in U$].

Παράδειγμα:

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0,\ x\in\mathbb{R} \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$

$\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3, (x,y)\in\mathbb{R}^2\} = \{(x,y,\underbrace{f(x,y)}_{=1}) : (x,0)\in\mathbb{R}^2 \text{ με } x\in\mathbb{R}\}$

$\cup \{(x,y,\underbrace{f(x,y)}_{=0}) : (x,y)\in\mathbb{R}^2, y\neq 0\}$



Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ με $y_0\neq 0$.

Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ με $y_0 \neq 0$ Τότε (αφού $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\ x\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ κλειστό (?) έχουμε ότι $\mathbb{R}^2 / \{(x,0), x\in\mathbb{R}\}$ ανοιχτό. Άρα $\forall (x_0,y_0)$ με $y_0\neq 0$ $\exists \varepsilon>0$ $B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset U/\{(x,0)\ x\in\mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon): f(x,y)=0$

$\Rightarrow \lim f(x,y) = 0 = f(x_0,y_0)$.

(2) $(x,y)\to(x_0,y_0)$

Scanned with CamScanner